Formulário de Física - Projeto Olímpicos

Sumário

1. Matemática

1.1 Identidades Trigonométricas

Identidades boas para resolver problemas que envolvem geometria, ou integrais com substituições trigonométricas.

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

`Seno da soma/diferença`

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

`Cosseno da soma/diferença`

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

`Tangente da soma/diferença`

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

`Relação fundamental da trigonometria`

$\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

`Redução de grau do seno quadrado`

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

`Redução de grau do cosseno quadrado`

$\dfrac{1}{\tan^2 x + 1} = \cos^2 x$

`Relações muito`

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \operatorname{sen} x$

`úteis para`

$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \cos x$

`resolver integrais`

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

`Prostaférese da soma de senos`

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

`Prostaférese da diferença de senos`

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

`Seno é uma função ímpar`

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

`Prostaférese da soma de cossenos`

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

`Prostaférese da diferença de cossenos`

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

`Cosseno é uma função par`

$A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\theta + \phi)$

$\phi = \arctan\dfrac{B}{A}$

`Combinação linear`

$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

`Tangente da média`

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$

`Tangente da metade`

1.2 Geometria

Essencialmente, a lei dos cossenos resolve tudo.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

`Lei dos cossenos`

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$

`Lei dos senos`

$\dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{ab\operatorname{sen}\theta_{ab}}{2} = pr =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R}$

`Área do triângulo`

1.3 Vetores

Umas setas.

$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_y b_y = a\, b \cos\theta$

Produto escalar

$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Produto vetorial

$\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = a\, b \operatorname{sen}\theta$

Módulo do produto vetorial, a área do paralelogramo formado entre os vetores

$\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$

BAC-CAB

1.4 Progressões

Sequências de números que seguem certo padrão.

– Aritmética

O próximo elemento é o anterior mais uma constante.

$a_n = a_1 + (n-1)r$

n-ésimo termo da progressão

$S_{(p,q)} = \dfrac{(q-p+1)(a_p + a_q)}{2}$

Soma de todos os valores do p-ésimo até o q-ésimo termo

– Geométrica

O próximo elemento é o anterior vezes uma constante.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

n-ésimo termo da progressão

$S_n = a_1 \dfrac{(1-q^n)}{1-q}$

Soma de todos os valores do primeiro até o q-ésimo termo

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$

Soma da P.G. infinita

1.5 Complexos

Não é tão complexo assim. Eles funcionam de forma muito parecida com os números reais.

$i^2 = -1$

Unidade imaginária i

$z = a + bi = |z| e^{i\theta}$

Parece um vetor, uma componente real e outra imaginária

$\theta = \arg z = \arcsin \dfrac{b}{|z|}$

θ *é o argumento de* z*, o ângulo que o define em coordenadas polares*

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

O módulo de um número complexo pode ser calculado por Pitágoras

$\overline{z} = a - bi = |z|e^{-i\theta}$

$\overline{z}$ é o conjugado de z

$\text{Re } z = a = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

Parte real

$\text{Im } z = b = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Parte imaginária

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

Produto em coordenadas polares, multiplica os módulos e soma os argumentos.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Exponencial complexa, fórmula de Euler, daqui também sai a fórmula mais bonita da matemática: $e^{\pi i} = -1$. É interessante pesquisar sobre fasores

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Não é tão útil, mas tenta resolver essa equação: $\operatorname{sen} x = 2$

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

1.6 Funções Hipérbolicas

Útil em relatividade.

$\sinh x = -i \operatorname{sen}(ix) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Seno hiperbólico, é uma função ímpar

$\cosh x = \cos(ix) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Cosseno hiperbólico, é uma função par

$\dfrac{d\sinh x}{dx} = \cosh x \qquad \dfrac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$

Derivadas bonitinhas

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

Idêntico ao seno

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Só muda o sinal em comparação ao cosseno

$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

Parece a composição de velocidades relativísticas

1.7 Cálculo

A matemática das mudanças

– Limites

Útil para testar caso limites (indo para ∞ ou 0) e também para calcular os limites de integração.

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Vale pra toda função contínua em a

$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

Regra de L'Hôpital. Roubadíssima para limites que dão $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. A notação $f'(x)$ é a derivada da função $f(x)$, a qual será definida em breve

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$

Definição do número de Euler.

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$

Uma propriedade da definição do número de Euler.

$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$

Teorema do Sanduíche. Na verdade, é simples de ver que funciona pra coisas que não são limites também, mas imaginar os gráficos se afunilando em $x = a$, tipo um sanduíche, é mais legal

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Uma aplicação prática do Teorema do Sanduíche

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Limite aleatório e bonito, só para ficar alinhado. ☺

– *Derivadas*

Essencial para calcular taxas de variação e achar pontos de máximo ou mínimo de uma função.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Definição de derivada

$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$

Regra da soma

$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Regra do produto

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Regra do quociente. Meio inútil, issaí sai fácil com a regra do produto.

$\frac{d(f \circ g(x))}{dx} = (f' \circ g(x)) \cdot g'(x)$

Regra da cadeia

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Aqui, $g(x) = f^{-1}$ é a função inversa de $f(x)$, tipo $\arccos x$, por isso esse é referido às vezes como $\cos^{-1}(x)$

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

Regra do tombo

$\frac{da}{dx} = 0$

Derivada de uma constante é 0

$\frac{d(af(x))}{dx} = a\frac{d(f(x))}{dx}$

Constantes podem sair da derivada

$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

O número de Euler é interessante, quando derivamos essa exponencial o resultado é ela mesma!

$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

Derivada do logaritmo natural: $\log$ na base e

$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$

Derivada do seno é cosseno, derivada do cosseno é menos seno

Para achar um ponto de máximo ou mínimo basta derivar e igualar a zero, com isso isole o x, e este será o x desse ponto de máx ou min (Para descobrir o y basta substituir x em $f(x)$). Se quiser saber se o ponto é um máx ou mín, pode calcular a segunda derivada e substituir esse x encontrado, se essa der positiva, é um mínimo, se der negativa, um máximo, se der 0 não dá para concluir nada.

– *Integrais*

Basicamente, a área do gráfico entre dois pontos.

Técnicas de integração:

- **Teorema Fundamental do Cálculo:** esse teorema nos diz que a integral é uma anti-derivada (assim como a subtração é uma anti-soma, a divisão um anti-produto,...) ou seja, se $f(x)$ é uma função diferenciável (da pra derivar), ela satisfaz:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(a) - f(b)$$

Então, derivar e integrar uma função é igual a não fazer nada, assim como somar e subtrair um mesmo número ou multiplicar e dividir pela mesma coisa, não altera o valor de algo. Dessa forma, você pode achar integrais pensando nas funções que derivando nos dão o termo sendo integrado (integrando). Segue abaixo alguns exemplos (o C aparece só porque é uma integral sem limites de integração; perceba que se derivarmos o lado direito, a constante some):

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \qquad \int e^{\lambda x} \, dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} + C \qquad \int \cos(\omega x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\omega x)}{\omega} + C$$

- **Integração por Partes:** basicamente, você pega a regra do produto e integra dos dois lados. Você chegará na seguinte relação (não se esqueça de aplicar os limites de integração no produto de $f(x)$ e $g(x)$):

  integra

  $$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = (f(x) \cdot g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

  deriva

  Na prática, o que fazemos é integrar uma das funções e depois derivar a outra (e tirar a integral dessa última). Com o método em mente, podemos, por exemplo, calcular a integral do logaritmo natural:

  integra

  $$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \, \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \, \ln x - x + C$$

  deriva

- **Substituição de variável:** também conhecido como o método que dá propósito de existência para o dx. Considere a seguinte integral:

  $$\int \frac{dx}{3x+4}$$

  Não seria muito mais fácil se $3x + 4$ fosse uma coisa só, tipo y? Aí, integral de $\frac{1}{y}$ a gente sabe fazer. Muito simples, só definirmos $y = 3x + 4$ que nossos problemas acabam. Fácil assim? ~~Sim~~ Não. Se fizermos isso, teremos que resolver $\int \frac{dx}{y}$. No entanto, como resolvemos integral em y se tem um x ali? Para trocarmos de variável, temos que substituir **tudo**, até esse dx aí. O que precisamos é encontrar uma relação entre dx e dy. Para isso, iremos introduzir o conceito de diferenciação. Diferenciar uma expressão é basicamente colocar um d na frente dela. Para vermos como funciona essa operação, precisamos derivá-la. Vamos usar de exemplo os dois lados de $y = 3x + 4$:

  $$\frac{d(y)}{dy} = 1 \Rightarrow d(y) = dy \qquad \frac{d(3x+4)}{dx} = 3 \Rightarrow d(3x+4) = 3dx$$

  Então, $dy = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{3}$. A integral ficará: $\int \frac{dy}{3y} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y} = \frac{\ln y}{3} + C$. Substituindo de volta, temos nossa resposta final:

  $$\int \frac{dx}{3x+4} = \frac{\ln(3x+4)}{3} + C$$

Nesse exemplo, o dx só serviu para atrapalhar. Mas, na verdade, ele costuma ser a estrela desse método. Vamos ver mais um exemplo para mostrar que ele pode ser essencial e também que não é necessário “dessubstituir" caso haja limites de integração. Considere a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Seja θ tal que $\tan\theta = x$. Temos que $dx = d(\tan\theta) = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$. Para os limites de integração, note que $\tan^{-1}(\pm\infty) = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cancel{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Perceba que graças ao dx nossa integral foi de $\cos^2\theta$ para 1, o que facilitou demais as nossas vidas. Note também que se aplicarmos as substituições nos limites de integração, não precisamos voltar a nossa variável original depois.

- **Frações Parciais:** basicamente, usaremos álgebra para decompor uma fração em uma soma de frações mais simples, o que facilitará nossa vida ao fazer as integrais com polinômios no denominador. Faremos isso para frações onde o numerador e o denominador são polinômios, ou seja, funções da forma: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (O grau de $P(x)$ precisa ser menor do que o de $Q(x)$). Para tal, analisaremos alguns casos, onde para distingui-los só é necessário observar o denominador $Q(x)$:
  - **Caso 1**: Diferentes fatores lineares no denominador (Polinômio $Q(x)$ com todas as raízes distintas). Nesse caso, $Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$, sendo α_i distintas raízes para $Q(x)$. As frações parciais podem ser obtidas supondo que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_2}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(x-\alpha_n)}$$

Onde c_i são constantes, que podem ser determinadas algebricamente. Para ilustrar, considere o seguinte exemplo:

$$\int \frac{5x+17}{x^2+8x+15}dx$$

A princípio, não há alguma solução óbvia para essa integral, mas por frações parciais podemos resolvê-la:

$$f(x) = \frac{5x+17}{x^2+8x+15} = \frac{5x+17}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x+3)}{(x+3)(x+5)} \Rightarrow A(x+5)+B(x+3) = 5x+17 \Rightarrow (A+B)x + (5A+3B) = 5x+17 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 5A+3B=17 \end{cases} \Rightarrow \quad B=4 \quad e \quad A=1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{4}{x+5}$$

Com isso podemos separar nossa integral em duas mais simples:

$$\int \frac{5x+17}{x^2+8x+15}dx = \int \frac{1}{x+3}dx + \int \frac{4}{x+5}dx = \ln(x+3) + 4\ln(x+5) + C$$

– **Caso 2**: Fatores lineares repetidos no denominador ($Q(x)$ com raízes repetidas, de multiplicidade maior que 1). Nesse caso $Q(x) = (x-a)^n$, sendo a a raiz de multiplicidade maior que 1. As frações parciais podem ser obtidas supondo que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{(x-a)} + \frac{c_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(x-a)^n}$$

Novamente, c_i são constantes, que podem ser determinadas algebricamente. Para ilustrar, considere o exemplo:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+8x+16} dx$$

A princípio, não há nenhuma solução clara para essa integral, mas por frações parciais podemos torná-la em algo que saibamos fazer:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+8x+16} = \frac{2x+5}{(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} = \frac{A(x+4)+B}{(x+4)^2} \Rightarrow A(x+4)+B = 2x+5 \Rightarrow Ax + (4A+B) = 2x+5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 4A+B = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 2 \quad e \quad B = -3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{x+4} - \frac{3}{(x+4)^2}$$

Com isso podemos separar nossa integral em duas que sabemos como resolver:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+8x+16} dx = \int \frac{2}{x+4} dx + \int (-3)(x+4)^{-2} dx = 2\ln(x+4) + 3(x+4)^{-1} + C$$

Integrais "manjadas" e triviais de serem demonstradas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

`Integral gaussiana, é bom ter decorado`

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = \Gamma(n+1) = n!$$

`Golfetti que usa isso aqui. A função` $\Gamma(x)$ `basicamente calcula fatoriais, porque satisfaz` $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x!$

– *Equações Diferenciais*

Equações que relacionam uma ou mais funções e suas derivadas.

- **Ansatz:** Faça $x = Ce^{\lambda t}$, onde C é uma constante, que é sucesso.
- Se der mais de um λ, a resposta final será da forma $\sum_i C_i e^{\lambda_i t}$, i.e., a combinação linear de soluções também é solução.
- Caso haja uma raiz com multiplicidade $m > 1$, sua forma geral será $\sum_{i=0}^{m-1} C_i t^i e^{\lambda_i t}$

- Às vezes, o lado direito da equação não é zero (equação diferencial não-homogênea). Quando isso acontecer, ignore esse termo e ache a solução normalmente - essa será a solução homogênea x_H. Agora, você terá que chutar um $x(t)$ que iguale àquele termo. Em geral, use que **Semelhante "dissolve" semelhante** (créditos à Química, e o Poço), ou seja, se o termo for uma constante, chute um $x(t)$ constante, se for uma função trigonométrica, chute-o como uma função trigonométrica - essa será a solução particular x_p. A solução geral será $x(t) = x_H + x_p$.

$\ddot{I} + \gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0$

Equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea - Circuito RLC

$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

Equação diferencial ordinária linear de segunda ordem heterogênea - Oscilação amortecida e forçada

$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

Equação característica do MHS

– *Mudança de Coordenadas*

Às vezes as coisas ficam mais fáceis quando vistas por outra perspectiva!

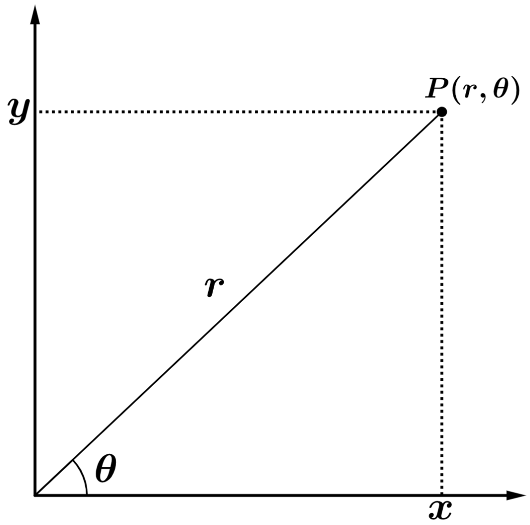
- **Coordenadas Polares:** Imagine uma partícula em MCU (não é Marvel Cinematic Universe) a uma distância r da origem e velocidade angular ω. Se quiséssemos descrever o movimento dessa partícula em coordenadas cartesianas, teríamos algo como:

  $x = r\cos(\omega t) \quad e \quad y = r\,\text{sen}\,(\omega t)$

  Meio deselegante, não? Para deixar isso mais elegante, vamos traçar o segmento que liga a origem à nossa partícula. Esse segmento possui um tamanho, né? Por ser um MCU, sabemos que ele é constante e vale r. Ele também faz um ângulo com a horizontal, vamos chamá-lo de θ. Perceba que, para um dado r e um dado θ, só há **um lugar possível que essa partícula pode estar**. Assim, se, ao invés de falarmos suas coordenadas x e y, falarmos sua distância à origem e o ângulo que faz com a horizontal, não estaremos perdendo informações. É daí que vem as chamadas coordenadas polares! Reescrevendo para esse sistema, nossas equações ficam:

  $r = r \quad e \quad \theta = \omega t$

  Muito melhor né? Para notar como intercambiar as variáveis, observa a Figura 1:



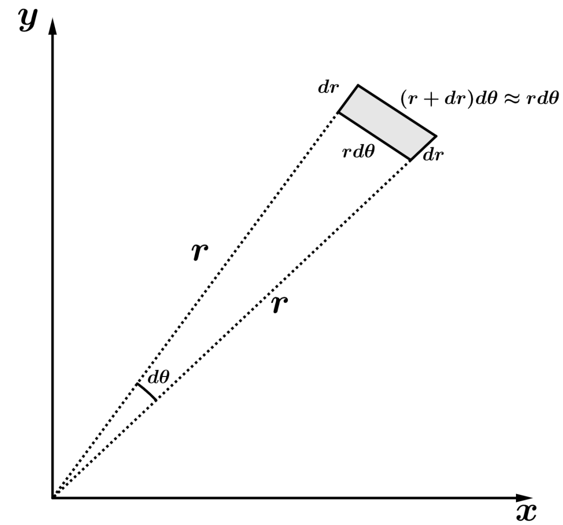
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Figura 1: Representação das Coordenadas Polares



$$dA = r\,dr\,d\theta$$

Figura 2: Cálculo do elemento de área

Muitas vezes será útil saber calcular a área de uma determinada figura que descreve uma curva $r_{(\theta)}$. Por exemplo, se temos uma superfície plana com densidade de carga σ, sabemos que a quantidade de carga será $\sigma = \dfrac{dq}{dA} \Rightarrow q = \displaystyle\int \sigma\,dA$. Mas como relacionamos r com dA? Olhando a Figura 2, podemos ver que a região entre r e $r + dr$ e θ e $\theta + d\theta$ forma um retângulo (no limite em que dr, $d\theta \to 0$) com área[1] $dA = r\,dr\,d\theta$. Com isso, podemos demonstrar a área de uma circunferência de raio R de uma maneira bem simples (usando o fato de que $r_{(\theta)} = R$):

$$A_\circ = \int dA = \int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi} r\,dr\,d\theta$$

Para resolver integrais duplas, podemos pensar em cada uma separada, e.g., se quisermos resolver a integral em θ primeiro, podemos tirar o r da integral, pois ele é independente em relação a essa variável. Logo:

$$A_\circ = \int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi} r\,dr\,d\theta = \int\limits_{r=0}^{R} r\,dr \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{r^2}{2}\bigg|_0^R \cdot \theta\bigg|_0^{2\pi} \Rightarrow A_\circ = \frac{R^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi = \pi R^2$$

De modo geral, a área será dada por $A = \displaystyle\int\limits_0^\theta \frac{r^2_{(\theta)}}{2}\,d\theta$. Note que integramos o raio de 0 a r, pois isso já leva em conta que o raio varia com o ângulo. Além disso, escrevemos a integral de 0 a θ, porque às vezes é necessário somente um setor dela.

Também é interessante analisarmos as equações de movimento dum corpo em coordenadas polares. Para isso, utilizaremos um pouco de cálculo vetorial. Sabendo que

[1] Se quiser ver a maneira mais rigorosa e geral para isso, você pode dar uma lida sobre Matriz Jacobiana aqui.

$\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$, podemos derivar $\vec{r}$ em relação ao tempo por uma regra do produto: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$. Mas quanto vale a derivada temporal desse versor?

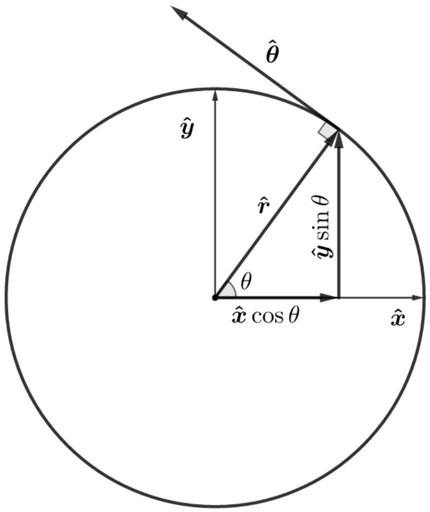


Figura 3: Relação entre os versores polares e cartesianos

Podemos, por meio da geometria, relacionar os versores $\hat{\boldsymbol{r}}$(radial) e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$(tangencial) àqueles que conhecemos melhor, o $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ das coordenadas cartesianas, que são sempre os mesmos, independente do tempo. À esquerda temos o círculo trigonométrico (raio 1), demonstrando a relação vetorial entre $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$. Conhecendo essa relação, também podemos obter aquela entre $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$, visto que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é perpendicular à $\hat{\boldsymbol{r}}$. Assim:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} \Rightarrow \dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} \Rightarrow \dfrac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

Com isso podemos encontrar o vetor velocidade instantânea $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

De forma análoga, podemos derivar o vetor velocidade instantânea para encontrar o vetor aceleração instantânea:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

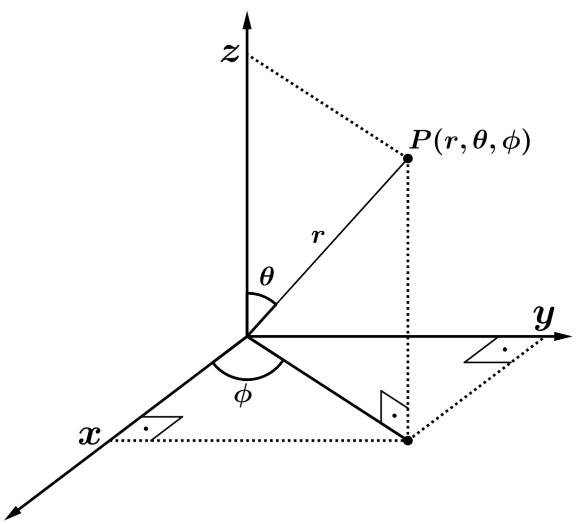


Figura 4: Representação das Coordenadas Esféricas

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

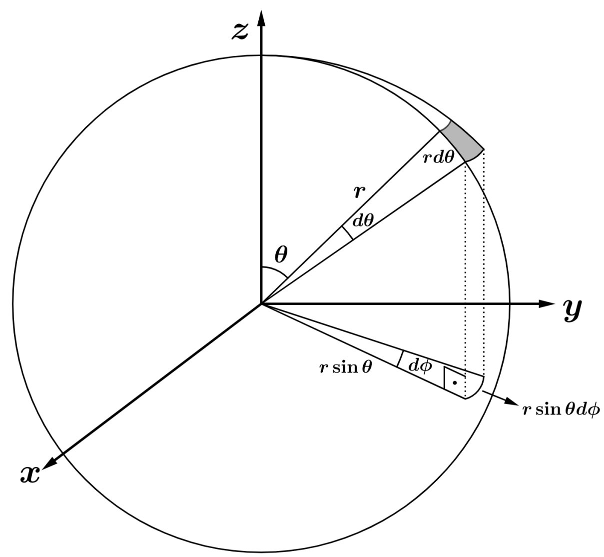


Figura 5: Cálculo do elemento de área

- **Coordenadas Esféricas:** análogo às polares, mas em três dimensões. Um bom exemplo desse sistema de coordenadas é a própria Terra. Longitude e Latitude são quase exatamente iguais ao ϕ e θ, respectivamente, o que muda é que a convenção do θ é um pouco diferente (ver Figura 4). No sistema geográfico o r não é definido, pois espera-se que o ser humano estará na superfície da Terra e não no meio do Manto (mas a noção de altitude é próxima). Talvez a Figura 4 seja meio confusa ainda, mas olhando o bastante para se acostumar, é possível perceber que a coordenada z do ponto P é simplesmente a projeção de r no eixo z. Para x e y precisamos dar um passo a mais e projetar r no plano xy. Agora, a coordenada x será a projeção dessa projeção no eixo x e a coordenada y é encontrada de maneira análoga. Para a Figura 5, uma análise muito mais cuidadosa é necessária. Queremos encontrar o elemento de área formado quando variamos θ e ϕ (variaremos o r para encontrar o elemento de volume). Observando com muito amor, carinho e compreensão de que desenhar uma figura 3D em um plano é bem difícil, podemos ver que a região formada é um retângulo. Um dos lados é fácil de ver que vale $rd\theta$ (caso não tenha ficado muito claro o porquê, tente comparar com a Figura 2). Para o outro lado, note que ele é formado quando variamos o ϕ com θ e r fixos. Para visualizar melhor, faremos um análogo à Terra. Como já dito, manter θ e r é equivalente a manter sua latitude (e permanecer na superfície da Terra, o que eu suponho que não seja muito complicado). Se sua latitude for 0, concorda que os pontos que satisfazem essa condição é justamente a linha do Equador (ou seja, uma circunferência)? A medida que você aumenta a latitude essa circunferência, ou melhor, o raio dela, vai diminuindo, até que chegue em 0 quando você está no polo. Com a Figura 5, podemos perceber que o raio dessa circunferência é $r \operatorname{sen}\theta$. Imaginando novamente você circulando a Terra, nota-se que, além da sua trajetória ser uma circunferência , o plano dela é paralelo ao do Equador. Assim, se projetarmos seu caminho nesse plano, não estaremos alterando sua extensão. Finalmente, o outro lado do retângulo, após andarmos $d\phi$, será dado por $r \operatorname{sen}\theta d\phi$. O elemento de área será, portanto, $dA = r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot r d\theta = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$. Perceba que se aumentarmos o raio de dr, formaremos um elemento de volume que possui área da base dA e altura dr, logo, $dV = dA \cdot dr = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$.

  Assim como em coordenadas polares, as derivadas temporais dos versores em coordenadas esféricas também dependem das próprias coordenadas.

– ***Expansões em séries***

Útil para aproximações e descobrir coisas bonitas.

- **Taylor**

  Ir até a terceira ordem é muito.

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  A ideia é transformar qualquer função em um polinômio

  Para $a = 0$ (Série de Maclaurin). Expandir ate a n-ésima ordem seria parar no x^n:

  $$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

  Importante aproximação! Usado em oscilações e óptica

  $$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

  $$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

  $$\ln(1+x) \approx x$$

  $$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

– ***Cálculo Multi-Variável***

Agora em 3D (Ou mais!)

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
Nabla

$$\boldsymbol{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
Gradiente

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
Divergente

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
Rotacional

$$\nabla^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)$$
Laplaciano

2. Mecânica

2.1 Cinemática

Geometria do movimento.

$$\Delta x = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$
A primeira fórmula que todo mundo decora

$$t = \int \frac{dx}{v_x} = \int \frac{dv_x}{a_x}$$
Talvez seja útil

$$x = \int \frac{v_x dv_x}{a_x}$$
Talvez seja útil, talvez você nunca use

$$H_{\text{máx}} = \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$
Altura máxima

$$A_{\text{máx}} = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$
Alcance máximo

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0}$$
Região que contém todos os pontos possíveis que você pode acertar lançando uma bolinha com velocidade v_0, chamada de parábola de segurança.

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{A/B} = \vec{\boldsymbol{v}}_A - \vec{\boldsymbol{v}}_B$$
Mudar de referencial

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$
Aceleração centrípeta

$$\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
Velocidade vetorial em coordenadas polares, $\hat{\boldsymbol{r}}$ é a componente radial e, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ a tangencial

$$\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
Aceleração vetorial em coordenadas polares

2.2 *Dinâmica*

O movimento e suas causas.

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

Tudo culpa da maçã

$\vec{p} = m\vec{v}$

Momentum, momento linear, momento translacional, quantidade de movimento, o que você quiser

$\vec{I} = \Delta\vec{p}$

Impulso

$\vec{F} = -\nabla U$

Primeira aparição do nabla, aqui ele é o gradiente

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$

Regra do paralelogramo (Soma de duas forças), equivalente a lei dos cossenos, mas com o ângulo externo entre os vetores

– *Forças básicas*

$\vec{P} = m\vec{g}$

Peso

$\vec{F_{el}} = -k\vec{x}$

Força elástica

$F_{at_{est}} \leq \mu_{est}N$

Força de atrito estático, μ_{est} é o coeficiente de atrito estático

$F_{at_{cin}} = \mu_{cin}N$

Força de atrito cinético, μ_{cin} é o coeficiente de atrito cinético

– *Associação de molas*

Igual a associação de capacitores.

$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

Série

$k_{eq} = k_1 + k_2$

Paralelo

$k \propto N$

Número de voltas na hélice da mola

– *Energia*

$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \Delta K$

Trabalho, e o Teorema da energia cinética

$K = \frac{mv^2}{2}$

Energia cinética

$E_{grav} = mgh$

Energia potencial gravitacional na superfície da Terra

$E_{el} = \frac{kx^2}{2}$

Energia potencial elástica

$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$
Potência

$\eta = \frac{P_{\text{Útil}}}{P_{\text{Total}}}$
Rendimento

$\vec{\boldsymbol{r}}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum m_i}$
Centro de massa

– *Colisões*

O momento linear é conservado.

$e = \frac{|v_{afastamento}|}{|v_{aproximação}|}$
Coeficiente de restituição

- $e = 0$ Colisão perfeitamente inelástica, os corpos se “grudam"após a colisão ($v_{afastamento} = 0$), energia é dissipada.
- $0 < e < 1$ Colisão parcialmente elástica/inelástica, os corpos seguem separados após a colisão, energia é dissipada.
- $e = 1$ Colisão perfeitamente elástica, os corpos se afastam com a mesma velocidade relativa com que se aproximaram, energia é conservada.

– *Forças inerciais*

Forças fictícias em referenciais não inerciais.

$\vec{\boldsymbol{F}} = -m\vec{\boldsymbol{a}}$
Força inercial

$\vec{\boldsymbol{F}}_{cf} = m\omega^2\vec{\boldsymbol{r}}$
Força centrífuga

$\vec{\boldsymbol{F}}_{Cor} = -2m(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$
Força de Coriolis, é perpendicular a velocidade, não realiza trabalho

2.3 *Dinâmica Rotacional*

Análogo a dinâmica normal, só que com as coisas girando.

Translacional	Rotacional
m	I
$\vec{\boldsymbol{x}}$	$\vec{\boldsymbol{\theta}}$
$\vec{\boldsymbol{v}}$	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$
$\vec{\boldsymbol{a}}$	$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$
$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$	$\vec{\boldsymbol{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$
$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$
$K_{cin} = \frac{mv^2}{2}$	$K_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$
$W = \int \vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{l}}$	$W = \int \vec{\boldsymbol{\tau}} d\vec{\boldsymbol{\theta}}$

– ***Momentos de Inércia***

$$I = \sum mr^2 = \int r^2 dm$$

Calcular o momento de inércia

$$I' = I_0 + mr'^2$$

Teorema de Steiner, ou dos eixos paralelos

$$I_z = I_x + I_y$$

Teorema dos eixos perpendiculares

$$I = \eta mr^2$$

η é o coeficiente do momento de inércia

Alguns coeficientes dos momentos de inércia importantes (η): cilindro $1/2$, esfera maciça $2/5$, casca esférica $2/3$, barra $1/12$ (relativo a ponta $1/3$).

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Energia cinética de rotação

$$W = \int \vec{\boldsymbol{\tau}} d\vec{\boldsymbol{\theta}}$$

$$v = \omega r$$

Rolamento sem deslizamento, rotação pura

$$\vec{\boldsymbol{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}$$

Momento angular

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$$

Torque: braço vezes força

2.4 *Lagrangiana*

Pra resolver na porrada.

$$L = T - U$$

L é a Lagrangiana, T a energia cinética, U a potencial

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

Equação de Euler-Lagrange, onde q é uma coordenada generalizada

$H = T + V$

Hamiltoniana (Energia total)

$L = \dot{q}p - H$

H como uma Transformada de Legendre de L

2.5 Mecânica dos fluidos

– Hidrostática

$p = \frac{F}{A}$ $\quad 10^5 Pa = 1bar \approx 1atm = 760mmHg$

Pressão e algumas unidades importantes ($SI = Pa = N/m^2$)

$\Delta p = \rho hg$

Lei de Stevin, Diferença de pressão em um fluido

$E = \rho_{\text{líquido}} V_{\text{deslocado}} g$

Empuxo, resultante da diferença de pressão embaixo e em cima de um corpo num fluido

– Hidrodinâmica

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

Equação da continuidade

$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = const$

Equação de Bernoulli

$v = \sqrt{2gh}$

Equação de Torricelli

2.6 Gravitação

O parque dos astrônomos.

$\vec{\boldsymbol{F}}_{grav} = -\frac{GM_1M_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^2}\hat{r}$

Lei da gravitação universal de Newton

$U_{grav} = -\frac{GM_1M_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}$

Energia potencial gravitacional

$V_{grav} = -\frac{GM}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}$

Potencial gravitacional

– Leis de Kepler

A primeira lei nos indica que as órbitas dos planetas formam uma elipse com o Sol em um dos focos. A segunda lei nos indica que o vetor posição do planeta (Centrado no Sol) "varre" áreas iguais em tempos iguais, e é equivalente à conservação do momento angular. A terceira lei relaciona o período das órbitas com o semi-eixo maior da elipse.

$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m} = cte$

A variável L é o momento angular do corpo de massa m

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} = cte$

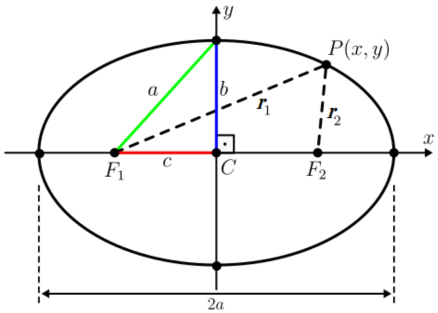
Aqui, T é o período. Note que, para o Sistema Solar, se T estiver em anos e a em UA, podemos dizer que a constante vale 1

$E_{\text{mecânica}} = K + U = \frac{-GMm}{2a}$

$2\langle K \rangle = -\langle V \rangle$

Teorema do Virial

– *Geometria da Elipse*



$r_1 + r_2 = 2a \qquad e = \dfrac{c}{a}$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad S = \pi ab$

Os focos são F_1 e F_2, a é o semi eixo maior, b o semi-eixo menor, e a excentricidade

$r = \dfrac{p}{1 - ecos\theta} \qquad p = a(1 - e^2)$

Forma polar da elipse, onde θ é o ângulo entre PF_1 e o eixo x; p também é conhecido como semi-latus rectum, $r(90°)$

$(x; y) = (acos\phi; bsin\phi)$

Forma paramétrica, onde ϕ é o ângulo medido entre a reta PC e o eixo x

Propriedade Refletora da elipse (assim como para todas as cônicas): um raio de luz qualquer que seja emitido a partir de um foco, quando refletido em um ponto da elipse, irá para o outro foco. Isso equivale a dizer que os ângulos entre as retas $t - PF_1$ e $t - PF_2$ são iguais, onde t é a reta tangente à elipse no ponto P

– *Aplicações*

Elipse Degenerada:

Se você quiser calcular o tempo de colisão entre duas partículas soltas no espaço com massa m e sujeitas a atração gravitacional, boa sorte. O processo na raça envolve uma integral super específica e não trivial, por isso podemos fazer uso da elipse degenerada. Fazendo $b \to 0$ podemos pensar no 'caimento' como somente uma trajetória em uma órbita achatada e, através da segunda lei de Kepler, calcular o tempo de queda através da área varrida pela partícula. Note que esse processo também pode ser utilizado na eletrostática, substituindo as cargas por massas equivalentes (para a terceira lei de kepler se manter), e em qualquer situação onde há uma força do tipo $F \propto r^{-2}$

Lei de Gauss na Gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{in}$$

Famosa. Em comparação à da eletrostática: sinal inverte, pois cargas de mesmo sinal se repelem enquanto massas de mesmo sinal se atraem;e aparece um $4\pi G$, pois comparando a força coulombiana com a grav. universal $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv G$

Equação de Binet(*): Ela se aplica pra qualquer situação que tem uma força de expressão qualquer, mas acho que isso se enquadra mais aqui mesmo he. Meio específico demais mas é bem interessante.

– *Órbitas*

hipérbole, parábola, elipse e círculo. Potencial Efetivo, condições de energia para cada uma, um pouco de geometria que equivale a conservar o momento angular e energia, mas é mais rapido, e saber angulo de desvio para orbita hiperbolica (classicasso)

3. Termodinâmica

3.1 Termometria

Fahrenheit é coisa de bobo.

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{K-273}{5}$$

C Celsius, F Fahrenheit, K Kelvin

3.2 Dilatometria

Dilatação térmica: ao aumentar a temperatura a distância média entre as moléculas também aumenta, o que aumenta o volume de um corpo.

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

Dilatação linear

$$\Delta A = A_0 \beta \Delta T \qquad \beta = 2\alpha$$

Dilatação superficial

$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T \qquad \gamma = 3\alpha$$

Dilatação volumétrica

3.3 Teoria Cinética

Considere um gás de N moléculas, de massa molecular m, num recipiente de volume V.

$$\langle K \rangle = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{2}$$

Energia cinética média total

$$P = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{3V} = \frac{2\langle K \rangle}{3V}$$

Pressão

– Distribuição de Maxwell

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

Densidade de probabilidade, é a probabilidade, por unidade de velocidade, de encontrar uma partícula com velocidade próxima à v

$$\frac{dN(v)}{N} = F(v)dv$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Velocidade média

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Velocidade mais provável

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Raiz da velocidade quadrática média

$$v \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

A aproximação para a velocidade de uma molécula, é o que você geralmente vai usar

3.4 Energia

Energia aparece em todo lugar.

$Q = W + \Delta U$

Primeira lei da termo

$W = \int p dV$

Trabalho de um gás, a área debaixo do gráfico de p por V

$\Delta U = C_v \Delta T$

Energia interna

$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}}{T}$

Entropia

$Q = mc\Delta T = C\Delta T$

c é o calor específico do material, C a capacidade calorífica do objeto

$C_p = C_v + nR$

Vale pra qualquer gás

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Coeficiente adiabático

$dU = TdS - pdV$

Primeira lei da termo melhorada

$dF = -SdT - pdV$

Energia livre de Helmontz, não confundir com a entalpia!

$dH = TdS + Vdp$

Entalpia, útil na termoquímica

$dG = -SdT + Vdp$

Energia livre de Gibbs, útil na química(termo/eletro)

– *Relações de Maxwell*

Relações obtidas à partir da simetria das segundas derivadas.

$$dU = TdS - pdV \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_U$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z}$$

3.5 Gás Ideal

Baixas pressões (rarefeito), altas temperaturas, as moléculas não interagem e nem ocupam volume, em média, as colisões são elásticas.

$PV = Nk_BT = nRT$

Equação de Clapeyron

$N_A = \frac{N}{n} = \frac{R}{k_B}$

N_A é o número de Avogadro, N o de partículas, n o de mols, R a constante universal dos gases ideais, e k_B a constante de Boltzmann

$U = \frac{i}{2}nRT$

Energia interna

– *Transformações*

$p = cte$

$W = p\Delta V$

Isobárica

$V = cte$

$W = 0$

Isocórica, isovolumétrica, isométrica

$T = cte$

$W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Isotérmica

$Q = 0,\ S = cte, pV^{\gamma} = cte$

$W = \frac{i(p_f V_f - p_i V_i)}{2}$

Adiabática

3.6 *Máquinas Térmicas*

O motor da história.

$W = Q_q - Q_f$

Conservação de energia: tudo que entra é igual a tudo o que sai

$\eta = \frac{W}{Q_q} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_q|}$

Eficiência térmica

– *Máquina de Carnot*

Duas isotermas e duas adiábaticas. Parece uma banana no diagrama $p - V$, é um retângulo no diagrama $T - S$

$\eta \leq \eta_{carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_q}$

Eficiência de Carnot, teoricamente, a melhor. O ciclo de Carnot é composto por duas adiabatas e duas isotermas, num diagrama $p - V$ é uma banana, num $T - S$ é um retângulo

3.7 *Gases Reais*

Leva em conta a interação entre as moléculas e o volume que elas ocupam.

$\left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T$

Gás de Van der Waals, lembre-se das forças que atraem as moléculas da química, e elas ocupam certo volume

3.8 Condução de Calor

O calor sempre flui do corpo de maior temperatura para o de menor.

$Q = \int C(T)dT$

Onde $C(T)$ é a capacidade térmica

$\phi = \frac{kA}{L}(\theta_1 - \theta_0)$

Fluxo de calor, lei de Fourier

3.9 Tensão Superficial

Por isso que quando você derruba um copo d'água ela não se espalha por toda superfície da Terra.

$U = \sigma S$

Energia

$F = \sigma L$

Força

$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

Equação de Young-Laplace

$\sigma_{GS} = \sigma_{LS} + \sigma_{GL} \cos\alpha$

Ângulo de contato

3.10 Mecânica Estatística

4. Oscilações

4.1 Oscilador harmônico

Sistema massa-mola, um pêndulo com amplitude pequena, parece bem específico, mas aparecem em muitas outras coisas na natureza.

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

Equação do MHS (Movimento Harmônico Simples), não tenha medo de cartear o sinal de menos

$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$

Equação horária do MHS

$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x}{2}$

Energia total

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Período pêndulo simples com ângulo pequeno

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Período sistema massa-mola

4.2 Oscilações amortecidas

Botando as equações diferenciais pra trabalhar.

$\vec{F_a} = -b\vec{v}$

Força de amortecimento

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$

$m\ddot{x} = -kx - bv \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Oscilação amortecida

4.3 Oscilações forçadas

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Oscilação forçada

4.4 Oscilações amortecidas e forçadas

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Oscilação amortecida e forçada

4.5 Oscilações acopladas

Autovetores e autovalores.

5. Ondas

Transportam energia, momento e informação, sem transportar matéria.

$$v = \lambda f$$

Equação fundamental da ondulatória: v é a velocidade, λ é o comprimento de onda e f a frequência

$$f = \frac{1}{T}$$

Frequência é o inverso do período

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k é o número de onda

$$\omega = 2\pi f = kv$$

ω é a frequência angular ou pulsação

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Onda unidimensional, f se propaga para a direita, g para a esquerda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftarrow \nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\ddot{y}$$

Equação de onda

$$y = A\cos(kx - \omega t + \phi_0)$$

Equação de uma onda harmônica unidimensional, sendo A a amplitude e ϕ_0 a fase inicial

$$v_T = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi_0)$$

$$v_{T_{\text{Máxima}}} = \omega A$$

Velocidade transversal

$$v = \frac{T}{\mu}$$

Velocidade de propagação de uma onda numa corda de densidade linear μ, sob uma tensão T

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Velocidade de propagação de uma onda num gás de coeficiente adiabático γ, e massa molar M, numa temperatura T

5.1 Som

É bem rápido, mas não tanto quanto a luz.

$$f_o = f_e \frac{v_{som} \pm v_o}{v_{som} \pm v_e}$$

Efeito Doppler: iiiiiiwwwwuuuuuu

5.2 Ondas eletromagnéticas (Luz)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Relação de maxwell para velocidade da luz c, permeabilidade magnética do vácuo μ_0,permissividade elétrica do vácuo ε_0

6. Óptica

6.1 Óptica Geométrica

O princípio de Fermat: a luz sempre percorre o caminho que minimize o tempo dum ponto A até B. Porém ao mudar de meios, a velocidade com que a luz os atravessa pode mudar (a frequência da onda se mantém, o comprimento de onda muda), caracterizando o fenômeno de **refração**.

$$n = \frac{c}{v}$$

n é o índice de refração do meio, c a velocidade da luz no vácuo e v a velocidade da luz no meio.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Lei de Snell-Descartes

$$\operatorname{sen} L = \frac{n_{menor}}{n_{maior}}$$

Ângulo limite para a reflexão total

– Espelhos esféricos e lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Cuidado com os sinais!

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} = \frac{f}{f-p}$$

Aumento linear transversal

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente} - n_{meio}}{n_{meio}}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Equação dos fabricantes de lentes

- ***Dioptros***

$$\frac{p}{n} = \frac{p'}{n'} \Leftrightarrow \frac{p_{objeto}}{n_{objeto}} = \frac{p_{observado}}{n_{observador}}$$

Dioptro plano (Aproximação para ângulos pequenos). p - profundidade real, p' - profundidade aparente, n - meio do objeto (água), n' meio do observador (ar)

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Dioptro esférico, n_1 é o meio do objeto, n_2 o meio da esfera, R o raio da esfera

- ***Lâmina de faces paralelas***

$$d = \frac{e \operatorname{sen}(i - r)}{\cos r}$$

d é o desvio para uma lâmina de faces paralelas, e é a espessura, i o ângulo de incidência e r de refração

- ***Construções geométricas***

Para encontrar a trajetória de raios de luz através de lentes:

a) Raios passando pelo centro da lente não refratam;

b) Raios paralelos ao eixo óptico passam através do foco;

c) Após sofrerem refração, raios inicialmente paralelos se encontram no plano focal;

d) A imagem de um plano é um plano; esses dois planos se encontram no plano da lente.

- ***Fluxo luminoso, Intensidade luminosa, Iluminância***

Fluxo luminoso ϕ [unidade: lúmen (lm)] mede a energia da luz(emitida, passando por um contorno, etc), ponderada de acordo com a sensibilidade do olho. Intensidade luminosa [candela (cd)] é o fluxo luminoso (emitido por uma fonte) por ângulo sólido: $I = \frac{\phi}{\Omega}$. Iluminância [lux (lx)] é o fluxo luminoso (caindo em uma área) por unidade de área: $E = \frac{\phi}{S}$.

(Tirado de Formulário do Kalda)

6.2 *Óptica Física*

Tem lista do Kalda curtinha disso e tem uma de exercícios do ITA.

Interferência (single, double and triple slit, anéis de newton (por reflexão e transmissão), filmes finos, etc), difração, ângulo de brewster

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

Resolução angular

– Polarizadores

$I = I_0 \cos^2 \phi$

Lei de Malus, funciona para luz linearmente polarizada, ϕ é o ângulo entre os planos de polarização

$I = \frac{I_0}{2}$

Para luz não polarizada, a intensidade transmitida é metade da incidida, já que a média do $\cos^2$ é $1/2$

7. Circuitos

7.1 Resistores e circuitos de corrente contínua

Se você encontrar uma simetria interessante, aproveite-a.

$i = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$

i é a corrente elétrica, Q a carga que atravessa certa seção transversal do fio; i tem sentido oposto ao fluxo real de elétrons

$U = RI$

Lei de Ohm

$R_{\text{série}} = \sum_i R_i$

Associação de resistores em série

$\frac{1}{R_{paralelo}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

Associação de resistores em paralelo

$R = \frac{\rho L}{A}$

O mnemônico proibido, ρ é a resistividade, L o comprimento do fio, A a área da seção transversal do fio

$P = IU = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

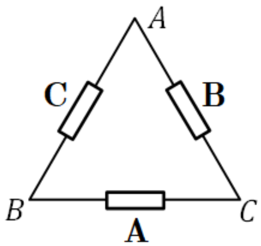
Potência dissipada

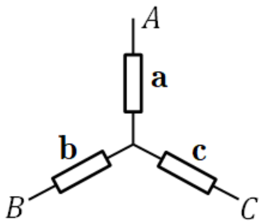
$a = \frac{BC}{A + B + C}$

Delta para estrela (Delta-Estrela, Triângulo-Estrela, $\Delta - Y$)

$A = \frac{ab + ac + bc}{a}$

O contrário do anterior, estrela para delta, para decorar lembre que a fórmula é a mesma só inverter ***tudo***





7.2 Impedâncias e circuitos de corrente alternada

Muito parecido com oscilações amortecidas e forçadas.

$Z = R + iX = |Z|e^{i\arg(Z)} = \frac{V}{I} = \frac{|V|}{|I|}e^{i(\phi_V - \phi_I)}$

Z é a impedância, uma "resistência complexa", tendo uma componente real ($R \to$ Resistência), e uma imaginária($X \to$ Reatância)

$Z_R = R$

Resistor

$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

Capacitor

$Z_L = i\omega L$

Indutor

$P = |U||I|\cos(\arg Z) = \sum I_i^2 R_i^2$

Potência dissipada

$V = |V|e^{i(\omega t + \phi_V)} \Rightarrow Re(V) = |V|\cos(\omega t + \phi_V)$

Tensão alternada, geralmente uma onda sinusoidal em exercícios

$I = |I|e^{i(\omega t + \phi_I)} \Rightarrow Re(I) = |I|\cos(\omega t + \phi_I)$

Corrente alternada

– Capacitores

Armazenam energia na forma de campo elétrico. Armazenam cargas, corrente contínua não os atravessa (a não ser que você estoure o capacitor com uma ddp muito grande), mas alternada de certa forma "sim", por meio de induções (não são as cargas que o atravessam).

$C = \frac{Q}{U}$

C é a capacitância, a carga armazenada no capacitor por unidade de tensão

$C_{||} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Capacitância de um capacitor de placas paralelas

$W_C = \frac{CU^2}{2}$

Energia armazenada num capacitor

$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

Impedância dum capacitor

– Indutores

Também chamados de bobinas, armazenam energia na forma de campos magnéticos, agem por indução.

$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$

Lei da indução de Faraday

$\phi_B = BS = LI$

Fluxo magnético

$\varepsilon = -N\frac{d\phi_B}{dt}$

Para uma bobina com N voltas

$U = L\dot{I}$

L é a indutância, no SI em H (Henry)

$W_L = \frac{LI^2}{2}$

Energia armazenada num indutor

$Z_L = i\omega L$

Impedância dum indutor

– Transformadores

Nada a ver com o Optimus Prime nem o Bumblebee.

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

8. Eletromagnetismo

No fundo tudo só depende dumas 4 equações ¯_(ツ)_/¯

8.1 Eletrostática

– Cargas Pontuais

$$F_{el} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Força de Coulomb

$$U_{el} = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

Energia potencial elétrica

$$V_{el} = \frac{kq}{r}$$

Potencial elétrico

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

k é a constante de Coulomb, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo

$$E = \frac{kq}{r^2}$$

Campo elétrico

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{el} = q\vec{\boldsymbol{E}}$$

Força numa carga pontual q em um campo $\vec{\boldsymbol{E}}$

– Dipolos Elétricos

$$\vec{\boldsymbol{p}} = q\vec{\boldsymbol{d}}$$

Momento do dipolo elétrico, aponta da carga negativa para a positiva

$$V = \frac{k\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Potencial do dipolo cai com r quadrado

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{k\vec{\boldsymbol{p}}}{r^3} + \frac{3k(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r^3}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Campo elétrico do dipolo cai com r ao cubo

$$F \propto r^{-4}$$

Interação entre dois dipolos

$$W = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}$$

Energia dum dipolo em um campo $\vec{\boldsymbol{E}}$

$$\tau = \vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

Torque num dipolo em num campo $\vec{\boldsymbol{E}}$

– *Condutores*

$E = 0$ dentro de um condutor; qualquer carga líquida fica na **superfície** do condutor; o condutor é **equipotencial**; $\vec{\boldsymbol{E}}$ é perpendicular à superfície imediatamente fora do condutor.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

Campo imediatamente fora de um condutor

8.2 *Magnetostática*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{mag} = q\,\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Força de Lorentz

$$d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^3}$$

Lei de Biot-Savart, para calcular campos magnéticos gerados por correntes elétricas

8.3 *Equações de Maxwell*

E Maxwell disse “Faça-se a luz!". E a luz foi feita.

$$\vec{\boldsymbol{J}} = ne\vec{\boldsymbol{v}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}}$$

$\vec{\boldsymbol{J}}$ - densidade de corrente, σ - condutividade ($\sigma = 1/\rho$, inverso da resistividade)

$$\phi_E = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{a}}$$

Fluxo elétrico por uma superfície de área A

$$\phi_E = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{a}}$$

Fluxo magnético

– *Forma diferencial*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Lei de Gauss

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

Lei de Gauss do magnetismo

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$

Lei da indução de Faraday

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\vec{\boldsymbol{J}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

Lei de Ampère com adição de Maxwell

– *Forma integral*

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Lei de Gauss

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{a}} = 0$$

Lei de Gauss do magnetismo

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t}$$

Lei da indução de Faraday

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi_E}{\partial t}$$

Lei de Ampère com adição de Maxwell

– *Em termos dos potenciais*

$\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}$
Vetor potencial magnético

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$
ϕ *é o potencial elétrico*

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{J}}$$

8.4 *Campos manjados*

Campos elétricos podem ser calculados a partir da Lei de Gauss, e magnéticos pela lei de Ampère ou Biot-Savart.

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Plano infinito, densidade superficial σ

$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
Fio carregado, densidade linear λ

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Fio com corrente contínua

$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$
Espira circular

$B = \mu_0 I \frac{N}{L}$
Solenoide longo, com N *voltas e comprimento* L

8.5 *Campos na matéria*

$\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{E}} = \varepsilon_0\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}}$
Campo de deslocamento elétrico

$\vec{\boldsymbol{P}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dV} = \varepsilon_0\chi_e\vec{\boldsymbol{E}}$
Densidade de Polarização, indica a densidade de momentos de dipolos elétricos num material

$\chi_e = \varepsilon_r - 1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$
Susceptibilidade elétrica

$\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\vec{\boldsymbol{B}}}{\mu} = \frac{\vec{\boldsymbol{B}}}{\mu_0} - \vec{\boldsymbol{M}}$
Campo magnético H

$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{m}}}{dV} = \chi_m\vec{\boldsymbol{H}}$
Polarização magnética, indica a densidade de momentos de dipolos magnéticos num material

$\chi_m = \mu_r - 1 = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$
Susceptibilidade magnética

8.6 Leis de Conservação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}$$

Equação da continuidade

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$$

Teorema de Poynting, S é o vetor de Poynting: a energia por unidade de tempo, por unidade de área, transportada pelos campos eletromagnéticos

9. Física Moderna

9.1 Corpos Negros

Absorvem toda a radiação eletromagnética incidente, e também atuam como fontes ideais de radiação térmica.

$$\lambda T = b$$

Lei de Wien

$$I = \frac{P}{A} = \sigma T^4$$

Lei de Stefan-Boltzmann

9.2 Relatividade

Relatividade restrita: as leis da física são as mesmas, e a velocidade da luz é constante e tem o mesmo valor, em quaisquer referenciais inerciais.

– *Cinemática relativística*

Em velocidades próximas a luz, efeitos "estranhos", incomuns ao nosso cotidiano, podem ser notados.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Fator de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Transformação de Lorentz (espaço)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Transformação de Lorentz (tempo)

$$v' = \frac{v - u}{1 - \dfrac{vu}{c^2}}$$

Velocidade relativa

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

Contração do espaço

$$T' = \gamma T$$

Dilatação do tempo

$$\Delta t = \frac{-\gamma v \Delta x}{c^2}$$

Relatividade da simultaneidade

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Efeito Doppler relativístico

– *Dinâmica relativística*

$F = \frac{dp}{dt}$
Força

$p = mv = \gamma p_0$
Momento

$m = \gamma m_0$
Massa

$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$
A fórmula que aparece em todo lugar

9.3 Quântica

Nem tudo é contínuo, muito é discreto.

$\lambda = \frac{h}{p}$
Comprimento de onda de de Broglie

$E = h\nu$
Relação de Planck-Einstein, a energia de um fóton é proporcional à sua frequência

– *Efeito Fotoelétrico*

Taca luz vermelha no metal, elétron não sai. Taca luz roxa, elétron sai **:O**

$E_c = \frac{mv^2}{2} = h\nu - \phi$
E_c é a energia cinética do elétron ejetado, e ϕ a função trabalho específica do metal, é notável que para $h\nu - \phi \leq 0$ o elétron não é ejetado

$U = \frac{h\nu - \phi}{e}$

$\int pdq = nh$
Quantização da ação, quantização de Bohr-Sommerfeld

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
Princípio da incerteza de Heisenberg

$\Delta x \Delta p \approx h$
Na prática, é isso que você usa

10. Experimental

Sempre dá errado, não se preocupa. Se tiver curto no tempo, cartear dados é sempre uma opção.

Guia oficial SBF: `http://noic.com.br/wp-content/uploads/2017/08/Arquivo-SBF-sobre-Retas-e-Erro.pdf`
Guia feito pelo parça do Golfetti: `https://noic.com.br/materiais-fisica/cursos/experimental/`
Guia feito pelo **Makotão**: `https://noic.com.br/materiais-astronomia/ideias/astronomia-ideia-18-analise-de-dados/`

10.1 *Calculadora*

– *Modos*

[MODE>COMP/SD/REG]
COMP para contas normais
SD para plotar valores e calcular médias, erros, etc
REG para plotar pontos de uma reta

– *Iteração*

Shoji mito: https://noic.com.br/materiais-astronomia/ideias/astronomia-ideia-16/
Basicamente, qnd vc quer resolver equação que não da pra fazer analiticamente (p.ex. $e^x + x = 5$)
Praticamente, a iteração na calculadora se resume aos seguintes passos:

1. Chutar um valor aproximado para a raiz da equação, e colocar esse valor na calculadora
2. Isolar um dos x que aparecem na equação, e colocar essa expressão substituindo os x por Ans na calculadora
3. Apertar repetidamente o botão $=$ até convergir em um valor
4. Se não convergir, tentar isolar um outro x e repetir o passo 3, e conferir se o valor chutado em 1 é plausível
5. Se ainda não convergir, esse método não funciona para essa equação. Tente outro método numérico ou procure pensar se precisa necessariamente resolver a equação para resolver o exercício (isso é bem importante, pq vc geralmente vai chutar e vai dar errado na primeira vez)

10.2 *Gráficos e Tabelas*

Recomendado o uso de uma régua. Lembre-se de colocar um título, as incertezas, unidades, e claro, os dados! No gráfico, tome cuidado com a escala, tente evitar números primos (exceto 2 e 5 que são bem bonitos), e não polua-o colocando os valores de x e y de cada ponto nos eixos. Um exemplo de tabela com seus respectivos dados seria:

Medições do período variando a distância do polo de rotação até o centro de massa

$(a \pm 0.05)cm$	$(T_{10} \pm 0.2)s$	$(T \pm 0.02)s$
1.00	22.9	2.29
2.00	16.2	1.62
3.00	13.5	1.35
4.00	12.2	1.22
5.00	11.1	1.11
6.00	10.4	1.04
7.00	9.7	0.97
8.00	9.5	0.95
9.00	9.4	0.94
10.00	9.5	0.95
11.00	9.6	0.96
12.00	9.7	0.97
13.00	9.8	0.98
14.00	9.9	0.99

Período em função da distância do polo de rotação até o centro de massa [$T(s) \times a(cm)$]

10.3 *Linearização*

Para linearizar uma função, queremos basicamente transformar um $f(x)$ em uma reta: $y = A + Bx$. Para tal, podemos fazer algumas trocas convenientes de variáveis, a partir dos dados que temos. Alguns exemplos, com os dados que você possui indicados antes das equações:

$$s \text{ e } t: \quad s = s_0 + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \overbrace{s}^{y} = \underbrace{s_0}_{A} + \underbrace{\frac{a}{2}}_{B} \overbrace{t^2}^{x}$$

$$L \text{ e } I: \quad L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow \overbrace{L}^{y} = \underbrace{10}_{B} \overbrace{\log_{10} I}^{x} \underbrace{-10\log_{10} I_0}_{A}$$

$$T \text{ e } a: \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ma^2}{mga}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\frac{I_C + ma^2}{ma} \Rightarrow \overbrace{aT^2}^{y} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}\frac{I_C}{m}}_{A} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{B} \overbrace{a^2}^{x}$$

$$x \text{ e } t: \quad x = x_0 e^{-\beta t} \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\beta t \Rightarrow \overbrace{\ln x}^{y} = \underbrace{ln x_0}_{A} \underbrace{-\beta}_{B} \overbrace{t}^{x}$$

10.4 *Tipos de erros*

N sei se esse precisa. Pesquise erros sistemáticos vs erros estatísticos/aleatórios

10.5 Erros estatísticos

Vc tirou uns valores pro período do pendulo. E agr? qual o valor médio do período + a incerteza? usa esse capitulo

10.6 Propagação de Incertezas

Vc achou o valor médio pro período. E agr, como relaciona ele com a gravidade + a incerteza? usa esse capitulo

$$\sigma^2_{f(x,y,z,...)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma^2_z + \dots$$

Também tem as fórmulas divinas pouco conhecidas ensinadas ao Golfs pelo parça Iraniano dele pra achar a incerteza a partir do gráfico. $y = A + Bx$ como referência

$$\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 = \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\left(\frac{1}{N-2}\right)$$

$$\Delta A = \Delta B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$$

10.7 Mínimos Quadrados

O que fazer depois de plotar os pontos no gráfico? Nunca ligue-os! Vamos traçar uma reta que melhor se encaixa aos dados, um dos métodos para isso é esse:

10.8 Método Gráfico

O pior método para traçar a reta, mas pode vir a calhar.